

OLIMPIADA NAȚIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ

SUCEAVA

18 februarie 2023

CLASA a XII-a

1. a) (3p) Arătați că grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și $((0, +\infty), \cdot)$ sunt izomorfe.

b) (4p) Arătați că grupurile $(\mathbb{R}, +)$ și (\mathbb{R}^*, \cdot) nu sunt izomorfe.

2. (7p) Fie (G, \cdot) un grup cu proprietatea că există două elemente $a, b \in G$ astfel încât $ab = b^3a$ și $ba = a^3b$. Demonstrați că $a^n b^n = ab$, pentru orice număr natural impar n .

3. a) (2p) Calculați $\int \frac{\arctg x}{x^2 + 1} dx$, $x \in \mathbb{R}$.

b) (5p) Determinați toate funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ care au proprietatea că admit o primitivă $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ astfel încât $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1} \cdot F(x) + \arctg x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

4. (7p) Pentru fiecare $n \in \mathbb{N}^*$, considerăm $I_n = \int_{\frac{1}{n+1}}^{n+1} \frac{1}{(x^2 + 1)(x^6 + 1)} dx$. Arătați că $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \frac{\pi}{4}$.

Notă: 1. Toate subiectele sunt obligatorii.

2. Fiecare subiect se punctează de la 0 la 7.

3. Timp de lucru 3 ore.